Volume de l'hypersphère Une hypersphère est une sphère en D dimensions. Elle généralise le concept de sphère que nous connaissons tous en dimension 3. L'idée est ici de donner une expression pour le volume V_D d'une hypersphère de rayon R dans un espace à D dimensions. Tout d'abord, on peut écrire que $V_D = C_D \times R^D$, où C_D est le volume de l'hypersphère unité (hypersphère de rayon $R = 1$). On en déduit immédiatement l'expression de S_D, la surface de l'hypersphère de rayon R, en dérivant l'expression précédente par rapport à R.

$$S_D = D.C_D.R^{D-1} \tag{1}$$

Calculons à présent C_D. Pour ce faire, nous allons poser $I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} \right)$. Tout d'abord, on peut remarquer que l'on a affaire à un produit d'intégrales de Gaussiennes. On a donc :

$$I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} \right) = \prod_{i=1}^{D} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}^D \tag{2}$$

Nous allons à présent effectuer le changement de variables $\sum_{i=1}^{D} x_i^2 = R^2$ et $\prod_{i=1}^{D} dx_i = dV_D$. On peut dès lors écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_D^2)} dx_1 dx_2 \ldots dx_D \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-R^2} dV_D \end{aligned}$$

On peut alors effectuer le nouveau changement de variable $y = R^2$. En particulier, on peut remarquer que l'on a la relation suivante :

$$dV_D = d(C_D.(R^2)^{\frac{D}{2}}) = d(C_D.(y)^{\frac{D}{2}}) = \frac{D}{2} C_D y^{\frac{D}{2}-1} dy \tag{3}$$

On en déduit alors immédiatement la nouvelle expression de I_D, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{D}{2} C_D \int_0^{+\infty} y^{\frac{D}{2}-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{D}{2} C_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \\ &= \frac{D}{2} C_D \left(\frac{D}{2} - 1\right)! \\ &= C_D \left(\frac{D}{2}\right)! \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le volume de la sphère unité :

$$C_D = \frac{\sqrt{\pi}^D}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \tag{4}$$

Ainsi, de manière générale, on a l'expression suivante pour le volume de l'hypersphère en dimension D :

$$V_D = \frac{\sqrt{\pi}^D}{\left(\frac{D}{2}\right)!} R^D \tag{5}$$